**Лекция 3. Управляемость линейных систем с ограниченным**

**управлением. Семинарское занятие № 2**

Рассмотрим следующую задачу о построении управления: Найти управление

 (1.29)

которое переводит траекторию системы

, (1.30)

исходящей из любой заданной начальной точки  в момент времени  в любую заданную точку  за промежуток времени  Множество  содержит единственную точку  моменты времени  фиксированы, 

Как следует из теоремы 3, множество всех управлений, каждый элемент которого переводит траекторию системы (1.30) из  в , определяется по формуле (1.15). Для решения задачи 2 следует найти управление  из пересечения множеств  и 

Для этого необходимо решить следующие две задачи:

1. убедиться в том, что пересечение Ø, Ø – пустое множество;
2. найти точки из множества  для случая, когда Ø.

Решение указанной задачи может быть сведено к решению следующей оптимизационной задачи:

 (1.31)

при условиях

 (1.32)

 (1.33)

где множество  определяется соотношением (1.29).

Заметим, что:

1. поскольку значение  то задача 2 имеет реше­ние тогда и только тогда, когда значение  где  решение оптимизационной задачи (1.31)–(1.33);
2. если  то решение задачи 2 определяется по формуле  где , – решение дифференциального уравнения (1.32) при 

**Программное управление.** Ниже приведено решение оптимизационной задачи (1.31)–(1.33) путем построения минимизирующих последовательностей   для которых   Если  то задача 2 имеет решение. В случае, когда , задача 2 не имеет решения.

**Теорема 5.** *Пусть матрица  Тогда функционал* (1.31) *при условиях* (1.32), (1.33) *непрерывно дифференцируем по Фреше, градиент функционала*



*в любой точке  вычисляется по формуле*

 (1.34)

 (1.35)

*где , – решение дифференциального уравнения* (1.32), *а функция , – решение сопряженной системы*

 (1.36)

*Кроме того, градиент удовлетворяет условию Липшица*

 (1.37)

**Доказательство.** Заметим, что функционал (1.29) не относится к типу известных функционалов (Лагранжа, Майера, Больца). Поэтому требуется отдельное доказательство каждого утверждения теоремы.

Пусть,  а функции  , – решения системы (1.32). Пусть  где , – решение дифференциального уравнения



Отсюда следует, что

 (1.38)

где 

Тогда приращение функционала







 (1.39)

Так как













где  в силу неравенства  оценки (1.38) и граничного условия (1.36), то приращение функционала (1.39) запишется так



где  при 

Отсюда следуют формулы (1.34), (1.35).

Докажем, что градиент функционала удовлетворяет условию (1.37). В самом деле, разность









Нормы







Тогда

 (1.40)

 (1.41)

где 

Поскольку



то, как следует из (1.38), норма

 (1.42)

Так как



то норма

 (1.43)

в силу (1.42), где 

Из решения дифференциального уравнения (1.36) следует, что



Тогда



Отсюда, применяя лемму Гронуолла, получим

 (1.44)

в силу (1.43), где 

Из (1.40), (1.41) с учетом (1.42), (1.44) имеем





Тогда

 (1.45)

 (1.46)

где 

Из (1.45), (1.46) имеем



Отсюда следует оценка (1.37), где  Теорема доказана.

На основе формул (1.34) – (1.37) строим последовательности  по следующему алгоритму

 (1.47)

где  В частности, при  имеем  где  постоянная Липшица из (1.37).

Как следует из теоремы 5, функционал  т.е.  непрерывно дифференцируем по Фреше по  и градиент функционала удовлетворяет условию Липшица.

**Лемма 1.** *Пусть ограниченное выпуклое замкнутое множество в  Тогда:*

1. *функционал*  *из* (1.31) *при условиях* (1.32), (1.33) *является выпуклым*;
2. *функционал*  *достигает нижней грани на множестве* 

**Доказательство.** Обозначим через







где  Легко убедиться в том, что



Отсюда следует, что функция  является выпуклой функцией по  т.е.

 (1.48)

Заметим, что для любых  при всех  решение дифференциального уравнения (1.32) обладает свойством



Тогда





в силу соотношений (1.48). Отсюда следует, что функционал (1.31) при условиях (1.32), (1.33) является выпуклым.

Пусть достаточно большое число. Тогда множество ограниченное выпуклое замкнутое множество. Тогда множество ограниченное выпуклое замкнутое множество в рефлексивном банаховом пространстве  Следовательно, множество  слабо бикомпактно. Выпуклый функционал  является слабо полунепрерывным снизу на выпуклом множестве  Тогда согласно теореме Вейерштрасса о том, что слабо полунепрерывный снизу функционал на слабо бикомпактном множестве достигает нижнюю грань, имеем: функционал  достигает нижнюю грань на множестве  Лемма доказана.

**Теорема 6.** *Пусть матрица  множество ограниченное, выпуклое и замкнутое, последовательности  определяются по формуле* (1.47). *Тогда:*

1. *Последовательности  являются минимизирующими, т.е.*



1. *Последовательности  слабо сходятся к множеству  где*

 при 

1. *Справедлива следующая оценка скорости сходимости*



1. *Для того, чтобы задача 2 имела решение, необходимо и достаточно, чтобы значение *

**Доказательство.** Из (1.47) следует, что

 (1.49)

 (1.50)

Вводя обозначения  соотношений (1.49), (1.50) запишем в виде

 (1.51)

Так как функционал  то верно неравенство



Отсюда, в частности, когда  имеем

 (1.52)

Из (1.51), (1.52) следует

 (1.53)

где 

Из неравенства (1.53) следует, что числовая последовательность  строго убывает, из-за ограниченности снизу значения функционала  она сходится. Следовательно,  при  Тогда из (1.53), переходя к пределу при  имеем  при 

Заметим, что функционал  выпуклый, множество  ограничено выпукло и замкнуто.

Как следует из леммы 1 и неравенства (1.53),

1) функционал  достигает нижней грани на множестве 

2) последовательность 

Покажем, что последовательность  минимизирующая. Поскольку  – выпуклый функционал, то  Отсюда при  получим

 (1.54)

в силу неравенства (1.51),  где диаметр множества  Так как по доказанному выше  при  то  Это означает, что последовательность  является минимизирующей.

Поскольку  слабо бикомпактное множество,  следовательно, все слабо предельные точки  принадлежат множеству 

Из неравенств (1.53), (1.54) следует, что    Отсюда в силу известной леммы о числовой последовательности о том, что  где  получим третье утверждение теоремы.

Последнее утверждение теоремы следует из (1.31). В самом деле, если  то

 (1.55)

Теорема доказана.

**Позиционное управление.** На основе найденного программного управления (1.55) может быть построено позиционное управление.

**Теорема 7.** *Пусть выполнены условия теорем* 5, 6*, и пусть, кроме того:  неособая матрица , определяется по формуле* (1.23)*, значение*

  

*Тогда позиционное управление  где  определяется по формуле* (1.55), *функция*



**Проекция точки на множество.** Пусть выпуклое замкнутое множество в проекция точки  на множестве  Ниже приведены формулы, по которым определяются проекции точки  на различных множествах  часто встречающихся на практике:

1. Множество



где  , – заданные непрерывные функции. Тогда



1. Множество  Тогда



где 

1. Множество



где  заданное число. Тогда



где  заданная вектор функция.

1. Множество  где Ḻ линейный ограниченный оператор, заданная вектор функция. Тогда



где  сопряженный оператор, оператор  имеет обратный оператор.

**Оптимальное быстродействие.** Рассмотрим задачу (1.29), (1.30) при условии, что конечный момент времени  не фиксирован. Необходимо найти наименьшее значение , для которого существует управление  переводящее траекторию системы (1.30), исходящую из заданной начальной точки  в момент времени , в заданную точку  за промежуток времени  ().

Таким образом, *решением задачи оптимального быстродействия* является пара , , где  – решение задачи управляемости (1.29), (1.30), соответствующее наименьшему значению  конечного момента времени .

Предположим, что найдено управление , из решения задачи управляемости (1.29), (1.30), где  известные величины.

Выберем  По изложенному алгоритму путем решения оптимизационной задачи (1.31) – (1.33) находим пару  . Если для данной пары  значение  то выберем значение , и решаем задачу (1.31)–(1.33) при фиксированном  . В случае, когда значение  задача (1.31)–(1.33) решается для значения  и т.д.